



J. E. F. T. Ribeiro

Centro de Física das Interações Fundamentais (CFIF), Departamento de Física,
Instituto Superior Técnico, Av. Rovisco Pais, P-1049-001
Lisboa, Portugal

A cor

- A simetria do estado Δ_0^{++} implica a existência de três cores: $\{V, v, A\}$ de forma construir um estado antisimétrico na cor.

A cor

- A simetria do estado Δ_0^{++} implica a existência de três cores: $\{V, v, A\}$ de forma construir um estado antisimétrico na cor.

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} = [\mathcal{A}] \begin{array}{|c|} \hline V_1 \\ \hline v_2 \\ \hline A_3 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|ccc|} \hline V_1 & v_1 & A_1 \\ \hline V_2 & v_2 & A_2 \\ \hline V_3 & v_3 & A_3 \\ \hline \end{array}$$

A cor

- A simetria do estado Δ_0^{++} implica a existência de três cores: $\{V, v, A\}$ de forma construir um estado antisimétrico na cor.

$$\begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \\ \hline \\ \hline \end{array} = [\mathcal{A}] \begin{bmatrix} V_1 \\ v_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} V_1 & v_1 & A_1 \\ V_2 & v_2 & A_2 \\ V_3 & v_3 & A_3 \end{vmatrix}$$

- A exemplo dos spins em que poderemos usar as matrizes de Pauli $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ para construir operadores de transição de spin : $\sigma_{\pm} = \sigma_x \pm \sigma_y$ com $\sigma_+ \downarrow = \uparrow$, $\sigma_- \downarrow = \uparrow$, também neste espaço de cor poderemos usar oito matrizes para produzir, de forma análoga transições de cor. São :

A cor

- A simetria do estado Δ_0^{++} implica a existência de três cores: $\{V, v, A\}$ de forma construir um estado antisimétrico na cor.

$$\begin{bmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{bmatrix} = [\mathcal{A}] \begin{bmatrix} V_1 \\ v_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} V_1 & v_1 & A_1 \\ V_2 & v_2 & A_2 \\ V_3 & v_3 & A_3 \end{vmatrix}$$

- A exemplo dos spins em que poderemos usar as matrizes de Pauli $\{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$ para construir operadores de transição de spin : $\sigma_{\pm} = \sigma_x \pm \sigma_y$ com $\sigma_+ \downarrow = \uparrow$, $\sigma_- \downarrow = \uparrow$, **também neste espaço de cor poderemos usar oito matrizes para produzir, de fprma análoga transições de cor. São :**

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A cor-II

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

A cor-II

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Temos ainda além da matriz diagonal $\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, uma outra matriz diagonal

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

A cor-II

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

Temos ainda além da matriz diagonal $\lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, uma outra matriz diagonal

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

A exemplo das matrizes de Pauli, também estas são matrizes hermiteanas de traço nulo, chamam-se matrizes de Gell-Man e são os geradores de um grupo chamado SU(3)-na lição III estudaremos sucintamente as consequências deste grupo. Como anteriormente, podem-se organizar as funções de onda na cor em representações do grupo de permutações \mathcal{S}_3

A fenomenologia da cor

Como no caso do spin, organizam-se as funções de onda de cor em representações irredutíveis que no caso de três quarks são :

$$\left\{ \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right. \textit{singleto de cor}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array} \textit{octeto de cor}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \textit{decupleteo de cor} \right\}$$

A fenomenologia da cor

Como no caso do spin, organizam-se as funções de onda de cor em representações irredutíveis que no caso de três quarks são :

$$\left\{ \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} \right. \textit{singleto de cor}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \textit{octeto de cor}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \textit{decupleteo de cor} \right\}$$

Com as matrizes de Gell-Mann, λ_i , pode-se organizar um vector, $\vec{\lambda} = \sum_i \lambda_i$ e um produto escalar, $|\vec{\lambda}|^2 = \vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda}$. Este escalar chama-se **Casimir** e, para cada uma das representações irredutíveis, tem um valor distinto. **É completamente análogo ao caso do spin (SU(2))**: $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$, com $\vec{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$

A fenomenologia da cor

Como no caso do spin, organizam-se as funções de onda de cor em representações irredutíveis que no caso de três quarks são :

$$\left\{ \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \right\} \textit{singleto de cor}, \begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \end{array} \textit{octeto de cor}, \square\square\square \textit{decupleteo de cor} \}$$

Com as matrizes de Gell-Mann, λ_i , pode-se organizar um vector, $\vec{\lambda} = \sum_i \lambda_i$ e um produto escalar, $|\vec{\lambda}|^2 = \vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda}$. Este escalar chama-se **Casimir** e, para cada uma das representações irredutíveis, tem um valor distinto. **É completamente análogo ao caso do**

spin (SU(2)): $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$, com $\vec{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$

$$\left(\begin{array}{l} \textit{Diagrama} \\ \textit{Fun. de onda} \\ \textit{Casimir } S^2 \end{array} \begin{array}{ccc} \square & \square\square & \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \\ \{\uparrow, \downarrow\} & \{\uparrow\uparrow, \frac{1}{2}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow), \downarrow\downarrow\} & \frac{1}{2}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \\ \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1) = \frac{3}{4} & 2 & 0 \end{array} \right)$$

A fenomenologia da cor

Como no caso do spin, organizam-se as funções de onda de cor em representações irredutíveis que no caso de três quarks são :

$$\left\{ \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \right\} \textit{singleto de cor}, \begin{array}{cc} \square & \square \\ \square & \end{array} \textit{octeto de cor}, \square\square\square \textit{decupleteo de cor} \left. \right\}$$

Com as matrizes de Gell-Mann, λ_i , pode-se organizar um vector, $\vec{\lambda} = \sum_i \lambda_i$ e um produto escalar, $|\vec{\lambda}|^2 = \vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda}$. Este escalar chama-se **Casimir** e, para cada uma das representações irredutíveis, tem um valor distinto. **É completamente análogo ao caso do**

spin (SU(2)): $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$, com $\vec{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$

$$\left(\begin{array}{l} \textit{Diagrama} \\ \textit{Fun. de onda} \\ \textit{Casimir } S^2 \end{array} \begin{array}{ccc} \square & \square\square & \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \\ \{\uparrow, \downarrow\} & \{\uparrow\uparrow, \frac{1}{2}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow), \downarrow\downarrow\} & \frac{1}{2}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \\ \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1) = \frac{3}{4} & 2 & 0 \end{array} \right)$$

$$\vec{S}^2 = 0 = (S_1 + S_2)^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_1 \cdot S_2 = 2 \cdot \frac{3}{4} + 2S_1 \cdot S_2 \rightarrow S_1 \cdot S_2 = -\frac{3}{4} = \frac{1}{2}(\mathcal{P}^{1,2} - \frac{1}{2})$$

A fenomenologia da cor

Como no caso do spin, organizam-se as funções de onda de cor em representações irredutíveis que no caso de três quarks são :

$$\left\{ \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \right\} \textit{singleto de cor}, \begin{array}{c} \square \square \\ \square \end{array} \textit{octeto de cor}, \square \square \square \textit{decupleteo de cor} \left. \right\}$$

Com as matrizes de Gell-Mann, λ_i , pode-se organizar um vector, $\vec{\lambda} = \sum_i \lambda_i$ e um produto escalar, $|\vec{\lambda}|^2 = \vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda}$. Este escalar chama-se **Casimir** e, para cada uma das representações irredutíveis, tem um valor distinto. **É completamente análogo ao caso do spin (SU(2))**: $\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{\sigma}$, com $\vec{\sigma} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z\}$

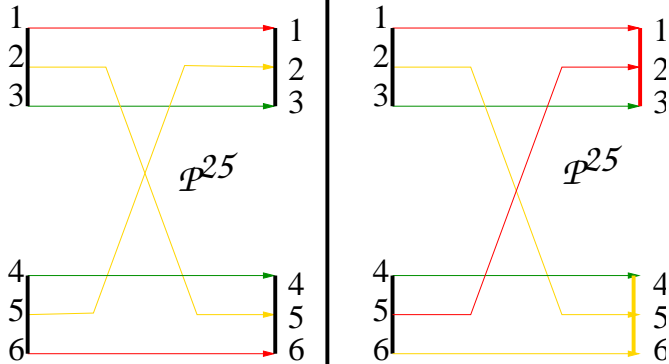
$$\left(\begin{array}{l} \textit{Diagrama} \\ \textit{Fun. de onda} \\ \textit{Casimir } S^2 \end{array} \begin{array}{ccc} \square & \square \square & \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \\ \{\uparrow, \downarrow\} & \{\uparrow\uparrow, \frac{1}{2}(\uparrow\downarrow + \downarrow\uparrow), \downarrow\downarrow\} & \frac{1}{2}(\uparrow\downarrow - \downarrow\uparrow) \\ \frac{1}{2}(\frac{1}{2} + 1) = \frac{3}{4} & 2 & 0 \end{array} \right)$$

No caso da cor (SU(3)) temos para $\vec{\lambda} \rightarrow \frac{\vec{\lambda}}{2}$:

$$\left(\begin{array}{l} \textit{Diagrama} \\ \textit{Casimir} \end{array} \begin{array}{ccc} \square & \square \square & \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \\ \frac{4}{3} & \frac{10}{3} & 0 \end{array} \right)$$

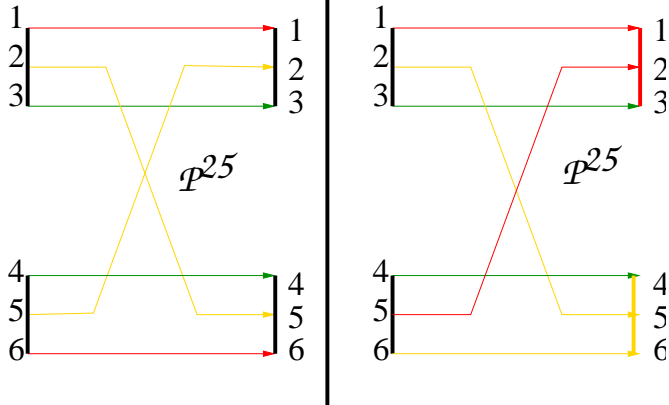
$$\vec{S}^2 = 0 = (S_1 + S_2)^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2S_1 \cdot S_2 = 2 \frac{3}{4} + 2S_1 \cdot S_2 \rightarrow S_1 \cdot S_2 = -\frac{3}{4} = \frac{1}{2}(\mathcal{P}^{1,2} - \frac{1}{2})$$

A fenomenologia da cor-continuação



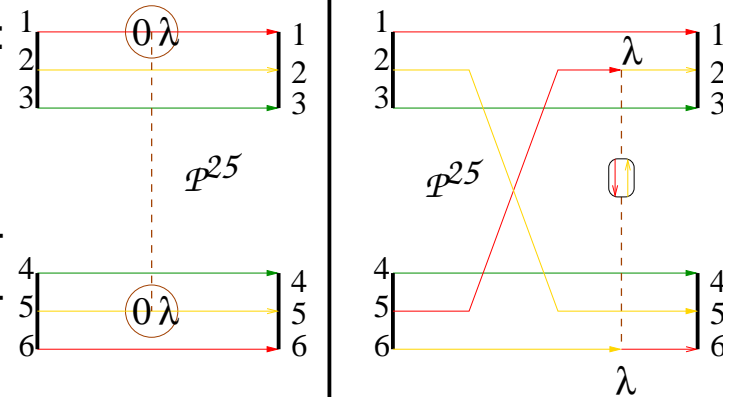
À esquerda: $\langle SS|\mathcal{P}^{25}|SS\rangle = \frac{1}{3}$, à direita, $\langle SS|\mathcal{P}^{25}|\mathcal{O}\mathcal{O}\rangle = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Como $\vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j = \frac{1}{2}(\mathcal{P}^{ij} - \frac{1}{3})$ e $\langle \mathcal{S}|\vec{\lambda}_j|\mathcal{S}\rangle = 0$, temos que $\langle SS|\mathcal{P}^{25}|SS\rangle = \frac{1}{3}$. Então como $(\mathcal{P}^{25})^2 = 1$ temos que $\langle SS|\mathcal{P}^{25}|\mathcal{O}\mathcal{O}\rangle = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$

A fenomenologia da cor-continuação

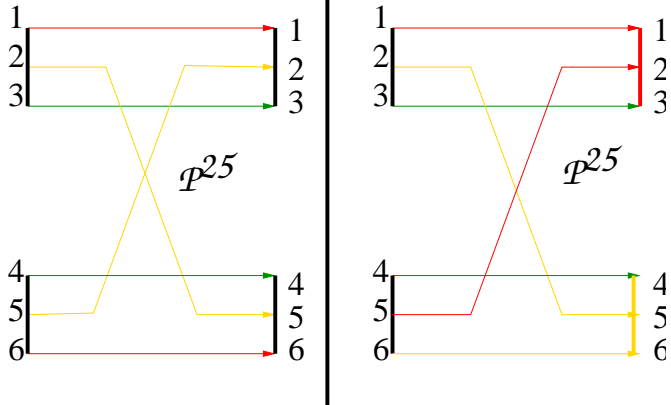


À esquerda: $\langle SS | \mathcal{P}^{25} | SS \rangle = \frac{1}{3}$, à direita, $\langle SS | \mathcal{P}^{25} | \mathcal{O}\mathcal{O} \rangle = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Como $\vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j = \frac{1}{2}(\mathcal{P}^{ij} - \frac{1}{3})$ e $\langle \mathcal{S} | \vec{\lambda}_j | \mathcal{S} \rangle = 0$, temos que $\langle SS | \mathcal{P}^{25} | SS \rangle = \frac{1}{3}$. Então como $(\mathcal{P}^{25})^2 = 1$ temos que $\langle SS | \mathcal{P}^{25} | \mathcal{O}\mathcal{O} \rangle = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$

À esquerda: Teorema de Wigner-Ekharth: $\langle \mathcal{S} | \vec{\lambda}_j | \mathcal{S} \rangle = 0$. Mas com troca, no caso \mathcal{P}^{25} temos, $\langle SS | \mathcal{P}^{25} | \mathcal{O}\mathcal{O} \rangle \langle \mathcal{O}\mathcal{O} | \vec{\lambda}_2 \cdot \vec{\lambda}_6 | SS \rangle = \frac{1}{2} \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{9}$. São estes diagramas os responsáveis pela forte repulsão N-N e fixam a escala de confinamento a \simeq um fermi.

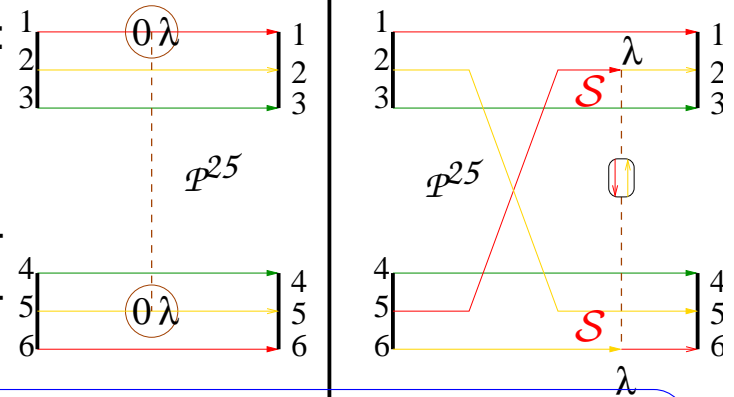


A fenomenologia da cor-continuação



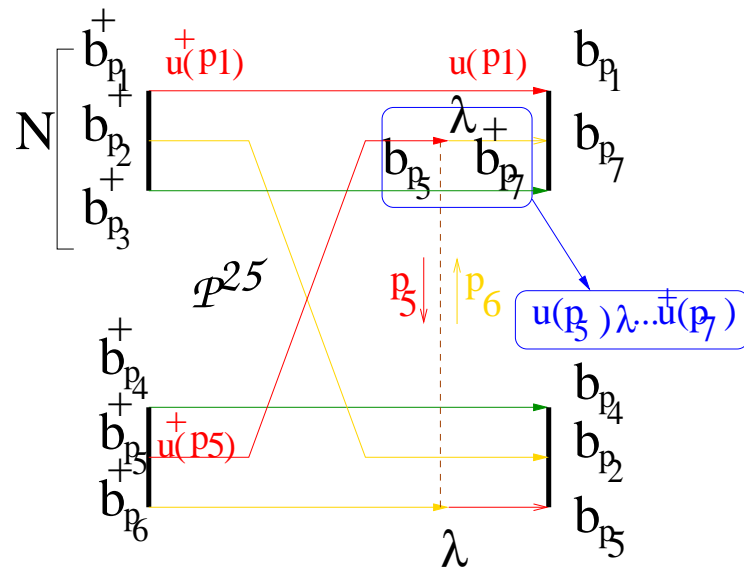
À esquerda: $\langle SS | \mathcal{P}^{25} | SS \rangle = \frac{1}{3}$, à direita, $\langle SS | \mathcal{P}^{25} | OO \rangle = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Como $\vec{\lambda}_i \cdot \vec{\lambda}_j = \frac{1}{2}(\mathcal{P}^{ij} - \frac{1}{3})$ e $\langle S | \vec{\lambda}_j | S \rangle = 0$, temos que $\langle SS | \mathcal{P}^{25} | SS \rangle = \frac{1}{3}$. Então como $(\mathcal{P}^{25})^2 = 1$ temos que $\langle SS | \mathcal{P}^{25} | OO \rangle = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$

À esquerda: Teorema de Wigner-Ekharth: $\langle S | \vec{\lambda}_j | S \rangle = 0$. Mas com troca, no caso \mathcal{P}^{25} temos, $\langle SS | \mathcal{P}^{25} | OO \rangle \langle OO | \vec{\lambda}_2 \cdot \vec{\lambda}_6 | SS \rangle = \frac{1}{2} \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{4}{9}$. São estes diagramas os responsáveis pela forte repulsão N-N e fixam e escala de confinamento a \simeq um fermi.



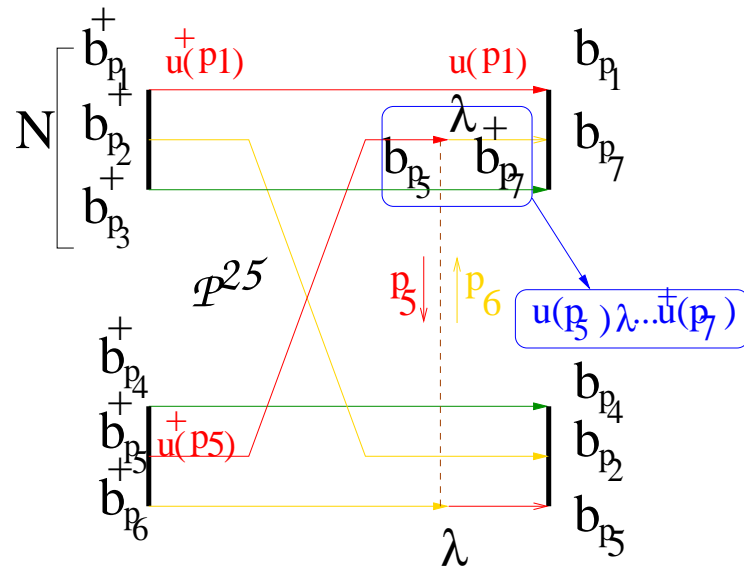
Para se obter uma repulsão é preciso um termo $\simeq \vec{\lambda} \cdot \vec{\lambda} S \cdot S$. Veremos mais tarde como aparece. Vai envolver a física da quebra espontânea da simetria quiral. Essa quebra **vai** fornecer o termo $S \cdot S$. **Sem ela** a repulsão seria **fraquinha**

Pondo fermiões Simetria quiral



Na figura à esquerda, num dado tempo, cria-se um nucleão dado por $\mathcal{N}(p_1, p_2, p_3) \hat{b}_{p_1}^\dagger \hat{b}_{p_2}^\dagger \hat{b}_{p_3}^\dagger$, choca com um outro nucleão definido por $\mathcal{N}(p_4, p_5, p_6) \hat{b}_{p_4}^\dagger \hat{b}_{p_5}^\dagger \hat{b}_{p_6}^\dagger$. Os operadores de criação dos quarks são definidos por \hat{b}_p^\dagger . A distribuição de momentos é dada pelos \mathcal{N} 's. A cada operador de criação está associado um **spinor** que é função de onda de um quark se fosse livre e não sujeito a \mathcal{N} .

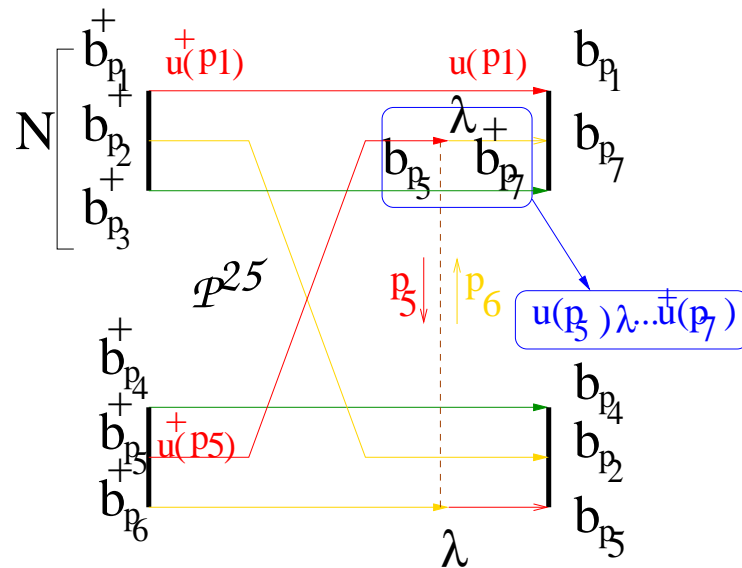
Pondo fermiões Simetria quiral



Na figura à esquerda, num dado tempo, cria-se um nucleão dado por $\mathcal{N}(p_1, p_2, p_3) \hat{b}_{p_1}^\dagger \hat{b}_{p_2}^\dagger \hat{b}_{p_3}^\dagger$, choca com um outro nucleão definido por $\mathcal{N}(p_4, p_5, p_6) \hat{b}_{p_4}^\dagger \hat{b}_{p_5}^\dagger \hat{b}_{p_6}^\dagger$. Os operadores de criação dos quarks são definidos por \hat{b}_p^\dagger . A distribuição de momentos é dada pelos \mathcal{N} 's. A cada operador de criação está associado um **spinor** que é função de onda de um quark se fosse livre e não sujeito a \mathcal{N} .

- Cada linha a cores representa a propagação de um quark no espaço de momentos. Por exemplo: $\Lambda^+(p_1) = u(p_1)u^\dagger(p_1)$. A Λ dá-se o nome de **Projector de Feynman**.

Pondo fermiões Simetria quiral



Na figura à esquerda, num dado tempo, cria-se um nucleão dado por $\mathcal{N}(p_1, p_2, p_3) \hat{b}_{p_1}^\dagger \hat{b}_{p_2}^\dagger \hat{b}_{p_3}^\dagger$, choca com um outro nucleão definido por $\mathcal{N}(p_4, p_5, p_6) \hat{b}_{p_4}^\dagger \hat{b}_{p_5}^\dagger \hat{b}_{p_6}^\dagger$. Os operadores de criação dos quarks são definidos por \hat{b}_p^\dagger . A distribuição de momentos é dada pelos \mathcal{N} 's. A cada operador de criação está associado um **spinor** que é função de onda de um quark se fosse livre e não sujeito a \mathcal{N} .

- Cada linha a cores representa a propagação de um quark no espaço de momentos. Por exemplo: $\Lambda^+(p_1) = u(p_1)u^\dagger(p_1)$. A Λ dá-se o nome de **Projector de Feynman**.
- A azul temos um vértice de interação : $u^\dagger(p_6)\lambda...u(p_5)$ que descreve a criação de um quark com momento p_6 após a destruição de um quark com momento p_5 . Os pontinhos estão lá em substituição de operadores que **trabalhem no espaço dos fermiões**

Pondo fermiões Transformações Canônicas

$$\{b_{\mathcal{F}}^{\dagger}(C), b_{\mathcal{F}'}^{\dagger}(C')\} = 0$$

$$\{b_{\mathcal{F}}(k), b_{\mathcal{F}'}^{\dagger}(q)\} = \delta(k - p)\delta_{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$$

$$\{d_{\mathcal{F}}(k), d_{\mathcal{F}'}^{\dagger}(q)\} = \delta(k - p)\delta_{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$$

$d_{\mathcal{F}}(k)$ e $d_{\mathcal{F}'}^{\dagger}(k)$, representam, respectivamente a destruição ou a criação de um antiquark. \mathcal{F} representa tudo o que não seja momentos: representa sabor, cor, spin etc.

Pondo fermiões Transformações Canónicas

$$\begin{aligned} \{ b_{\mathcal{F}}^{\dagger}(C), b_{\mathcal{F}'}^{\dagger}(C') \} &= 0 \\ \{ b_{\mathcal{F}}(k), b_{\mathcal{F}'}^{\dagger}(q) \} &= \delta(k - p)\delta_{\mathcal{F},\mathcal{F}'} \\ \{ d_{\mathcal{F}}(k), d_{\mathcal{F}'}^{\dagger}(q) \} &= \delta(k - p)\delta_{\mathcal{F},\mathcal{F}'} \end{aligned}$$

$d_{\mathcal{F}}(k)$ e $d_{\mathcal{F}'}^{\dagger}(k)$, representam, respectivamente a destruição ou a criação de um antiquark. \mathcal{F} representa tudo o que não seja momentos: representa sabor, cor, spin etc.

- Na literatura podem-se encontrar várias versões do mesmo campo fermiónico: diferem por normalizações triviais

$$\begin{aligned} \Psi^{BD}(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \left[\frac{m}{E} \right]^{1/2} \sum_s \left(b_s(p)u(p, s)e^{-\frac{ip_{\mu}x^{\mu}}{\hbar}} + d_s^{\dagger}(p)v(p, s)e^{\frac{+ip_{\mu}x^{\mu}}{\hbar}} \right) \\ \Psi^{IZ}(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \left[\frac{m}{E} \right] \sum_s \left(b_s(p)u(p, s)e^{-\frac{ip_{\mu}x^{\mu}}{\hbar}} + d_s^{\dagger}(p)v(p, s)e^{\frac{+ip_{\mu}x^{\mu}}{\hbar}} \right) \\ \Psi^P(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} [1] e^{ip \cdot x} \sum_s \left(b_s(p)u(p, s)e^{-\frac{ip_0 t}{\hbar}} + d_s^{\dagger}(p)v(-p, s)e^{\frac{+ip_0 t}{\hbar}} \right) \end{aligned}$$

Pondo fermiões Transformações Canónicas

$$\{b_{\mathcal{F}}^{\dagger}(C), b_{\mathcal{F}'}^{\dagger}(C')\} = 0$$

$$\{b_{\mathcal{F}}(k), b_{\mathcal{F}'}^{\dagger}(q)\} = \delta(k - p)\delta_{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$$

$$\{d_{\mathcal{F}}(k), d_{\mathcal{F}'}^{\dagger}(q)\} = \delta(k - p)\delta_{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}$$

$d_{\mathcal{F}}(k)$ e $d_{\mathcal{F}'}^{\dagger}(k)$, representam, respectivamente a destruição ou a criação de um antiquark. \mathcal{F} representa tudo o que não seja momentos: representa sabor, cor, spin etc.

- Na literatura podem-se encontrar várias versões do mesmo campo fermiónico: diferem por normalizações triviais

$$\begin{aligned} \Psi^{BD}(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \left[\frac{m}{E} \right]^{1/2} \sum_s \left(b_s(p)u(p, s)e^{-\frac{ip_{\mu}x^{\mu}}{\hbar}} + d_s^{\dagger}(p)v(p, s)e^{\frac{ip_{\mu}x^{\mu}}{\hbar}} \right) \\ \Psi^{IZ}(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^3} \left[\frac{m}{E} \right] \sum_s \left(b_s(p)u(p, s)e^{-\frac{ip_{\mu}x^{\mu}}{\hbar}} + d_s^{\dagger}(p)v(p, s)e^{\frac{ip_{\mu}x^{\mu}}{\hbar}} \right) \\ \Psi^P(\vec{x}, t) &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi\hbar)^{3/2}} [1] e^{ip \cdot x} \sum_s \left(b_s(p)u(p, s)e^{-\frac{ip_0 t}{\hbar}} + d_s^{\dagger}(p)v(-p, s)e^{\frac{ip_0 t}{\hbar}} \right) \end{aligned}$$

- Em todos os casos $\{\Psi_{\mathcal{F}}(x, t), \Psi_{\mathcal{F}'}^{\dagger}(x', t)\} = \delta_{\mathcal{F}, \mathcal{F}'}\delta(x - x')$ à custa de diferentes e triviais normalizações para os operadores de criação e destruição e dos spinores.

Pondo fermiões Simetria quiral

Mas existe uma ambiguidade que não é trivial. As relações de anticomutação não são suficientes para definir os operadores de criação e destruição. Eles ficam definidos a menos de uma infinidade de transformações canónicas: $\tilde{b}_{cfs}(\vec{p}) = \hat{S} \hat{b}_{cfs} \hat{S}^{-1} \dots$ em que \hat{S} , construído à custa dos operadores, $\{\hat{b}, \hat{d}, \dots\}$ tem que ser um escalar

● $\hat{S}|0\rangle = |\tilde{0}\rangle$, onde $\hat{b}|0\rangle = 0$. Isto é $|0\rangle$ é o “vácuo” para os operadores \hat{b} e \hat{d}

Pondo fermiões Simetria quiral

Mas existe uma ambiguidade que não é trivial. As relações de anticomutação não são suficientes para definir os operadores de criação e destruição. Eles ficam definidos a menos de uma infinidade de transformações canónicas: $\tilde{b}_{cf_s}(\vec{p}) = \hat{S} \hat{b}_{cf_s} \hat{S}^{-1} \dots$ em que \hat{S} , construído à custa dos operadores, $\{\hat{b}, \hat{d}, \dots\}$ tem que ser um escalar

• $\hat{S}|0\rangle = |\tilde{0}\rangle$, onde $\hat{b}|0\rangle = 0$. Isto é $|0\rangle$ é o “vácuo” para os operadores \hat{b} e \hat{d}

• Com $[\mathcal{M}](\hat{p}) ([\mathcal{M}](\hat{p}))^* = I$, temos

$$\hat{S} \begin{bmatrix} \hat{b}(p) \\ \hat{d}(p)^+ \end{bmatrix}_s \hat{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \phi(p) & -\sin \phi(p) \mathcal{M}_{ss'}(\hat{p}) \\ \sin \phi(p) \mathcal{M}_{ss'}^*(\hat{p}) & \cos \phi(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}(p) \\ \hat{d}(p)^+ \end{bmatrix}_{s'}$$

Pondo fermiões Simetria quiral

Mas existe uma ambiguidade que não é trivial. As relações de anticomutação não são suficientes para definir os operadores de criação e destruição. Eles ficam definidos a menos de uma infinidade de transformações canônicas: $\tilde{b}_{cfs}(\vec{p}) = \hat{S} \hat{b}_{cfs} \hat{S}^{-1} \dots$ em que \hat{S} , construído à custa dos operadores, $\{\hat{b}, \hat{d}, \dots\}$ tem que ser um escalar

- $\hat{S}|0\rangle = |\tilde{0}\rangle$, onde $\hat{b}|0\rangle = 0$. Isto é $|0\rangle$ é o “vácuo” para os operadores \hat{b} e \hat{d}

- Com $[\mathcal{M}](\hat{p}) ([\mathcal{M}](\hat{p}))^* = I$, temos

$$\hat{S} \begin{bmatrix} \hat{b}(p) \\ \hat{d}(p)^+ \end{bmatrix}_s \hat{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \phi(p) & -\sin \phi(p) \mathcal{M}_{ss'}(\hat{p}) \\ \sin \phi(p) \mathcal{M}_{ss'}^*(\hat{p}) & \cos \phi(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b}(p) \\ \hat{d}(p)^+ \end{bmatrix}_{s'}$$

- Basta considerár $\Psi_{fc}(\vec{x}, t)$ como um produto interno entre um espaço (Hilbert) gerado pelos spinores u e v e o espaço (Fock) gerado por $\{\hat{b}, \hat{b}^\dagger, \hat{d}, \hat{d}^\dagger\}$ para que a invariância de $\Psi_{fc}(\vec{x}, t)$ debaixo de rotações no espaço de Fock, obrigue a uma contra-rotação no espaço de Hilbert dos spinores u e v ,

$$\begin{bmatrix} u[\phi(p)] \\ v[\phi(p)] \end{bmatrix}(p) = \begin{bmatrix} \cos \phi(p) & -\sin \phi(p) M_{ss'}^*(\hat{p}) \\ \sin \phi(p) M_{ss'}(\hat{p}) & \cos \phi(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u[0] \\ v[0] \end{bmatrix}(p)$$

Simetria Quiral-Transformações de Bogoliubov

- Às transformações engendradas por \hat{S} , chamam-se **Transformações de Valatin-Bogoliubov**: $|\tilde{0}\rangle = \mathcal{S}|0\rangle = \text{Exp}\left\{\hat{Q}_0^+ - \hat{Q}_0\right\}|0\rangle$, com
- $$\hat{Q}_0^+(\Sigma) = \sum_{cf} \int d^3p \Sigma(p) M_{ss'}(\theta, \Phi) \hat{b}_{fcs}^+(\vec{p}) \hat{d}_{fcs'}^+(-\vec{p})$$

Simetria Quiral-Transformações de Bogoliubov

- Às transformações engendradas por \hat{S} , chamam-se **Transformações de Valatin-Bogoliubov**: $|\tilde{0}\rangle = \mathcal{S}|0\rangle = \text{Exp}\left\{\hat{Q}_0^+ - \hat{Q}_0\right\}|0\rangle$, com
- $\hat{Q}_0^+(\Sigma) = \sum_{cf} \int d^3p \Sigma(p) M_{ss'}(\theta, \Phi) \hat{b}_{fcs}^+(\vec{p}) \hat{d}_{fcs'}^+(-\vec{p})$
- Com a combinação 3P_0 para paridade +:

$$M_{ss'}(\hat{p}) = -\sqrt{8\pi} \sum_{m_l m_s} \begin{bmatrix} 1 & 1 & |0 \\ m_l & m_s & |0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & |1 \\ s & s' & |m_s \end{bmatrix} y_{1m_l}(\theta, \Phi)$$

Simetria Quiral-Transformações de Bogoliubov

- Às transformações engendradas por \hat{S} , chamam-se **Transformações de Valatin-Bogoliubov**: $|\tilde{0}\rangle = \mathcal{S}|0\rangle = \text{Exp}\left\{\hat{Q}_0^+ - \hat{Q}_0\right\}|0\rangle$, com

$$\hat{Q}_0^+(\Sigma) = \sum_{cf} \int d^3p \Sigma(p) M_{ss'}(\theta, \Phi) \hat{b}_{fcs}^+(\vec{p}) \hat{d}_{fcs'}^+(-\vec{p})$$

- Com a combinação 3P_0 para paridade +:

$$M_{ss'}(\hat{p}) = -\sqrt{8\pi} \sum_{m_l m_s} \begin{bmatrix} 1 & 1 & |0 \\ m_l & m_s & |0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & |1 \\ s & s' & |m_s \end{bmatrix} y_{1m_l}(\theta, \Phi)$$

- As funções $\Sigma(p)$ classificam um conjunto infinito de espaços de Fock possíveis. No geral, para interações fortes, o espaço de Fock é diferente do “usual”, i.e, $\Sigma(p) \neq 0$ pelo que o cálculo de perturbações é inútil, já neste ponto e sem necessidade de considerarmos outros obstáculos, tais como a natureza não abeliana de QCD, como veremos na lição III.

Simetria Quiral-Transformações de Bogoliubov

- Às transformações engendradas por \hat{S} , chamam-se **Transformações de Valatin-Bogoliubov**: $|\tilde{0}\rangle = \mathcal{S}|0\rangle = \text{Exp}\left\{\hat{Q}_0^+ - \hat{Q}_0\right\}|0\rangle$, com

$$\hat{Q}_0^+(\Sigma) = \sum_{cf} \int d^3p \Sigma(p) M_{ss'}(\theta, \Phi) \hat{b}_{fcs}^+(\vec{p}) \hat{d}_{fcs'}^+(-\vec{p})$$

- Com a combinação 3P_0 para paridade +:

$$M_{ss'}(\hat{p}) = -\sqrt{8\pi} \sum_{m_l m_s} \begin{bmatrix} 1 & 1 & |0 \\ m_l & m_s & |0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & |1 \\ s & s' & |m_s \end{bmatrix} y_{1m_l}(\theta, \Phi)$$

- As funções $\Sigma(p)$ classificam um conjunto infinito de espaços de Fock possíveis. No geral, para interações fortes, o espaço de Fock é diferente do “usual”, i.e, $\Sigma(p) \neq 0$ pelo que o cálculo de perturbações é inútil, já neste ponto e sem necessidade de considerarmos outros obstáculos, tais como a natureza não abeliana de QCD, como veremos na lição III.
- Para uma dada interação \mathcal{K} , corresponde uma função $[\Sigma(k)]$, de forma que temos $\Sigma[\mathcal{K}]$. Encontrar este funcional é o trabalho da Equação de Hiato de Massa.

Equação do Hiato de Massa I: Spinores

- Com $N(k)^2 = 2(1 + \sin(\phi(k)))$, os spinores $u_s(k), v_s(k)$ são dados, para a representação *Oliver – Péne* por:

$$u_s(k) = \frac{1}{N(k)} \left[1 + \sin(\varphi(k))\beta + \cos(\varphi(k)) \vec{\alpha} \cdot \hat{k} \right] u_{0s}, \quad \varphi(k) = 2\phi(k)$$
$$v_s(k) = \frac{1}{N(k)} \left[1 - \sin(\varphi(k))\beta - \cos(\varphi(k)) \vec{\alpha} \cdot \hat{k} \right] v_{0s}$$

Equação do Hiato de Massa I: Spinores

- Com $N(k)^2 = 2(1 + \sin(\phi(k)))$, os spinores $u_s(k), v_s(k)$ são dados, para a representação *Oliver – Péne* por:

$$u_s(k) = \frac{1}{N(k)} \left[1 + \sin(\varphi(k))\beta + \cos(\varphi(k)) \vec{\alpha} \cdot \hat{k} \right] u_{0s}, \quad \varphi(k) = 2\phi(k)$$
$$v_s(k) = \frac{1}{N(k)} \left[1 - \sin(\varphi(k))\beta - \cos(\varphi(k)) \vec{\alpha} \cdot \hat{k} \right] v_{0s}$$

- trocando $\{\sin(\varphi(k)), \cos(\varphi(k))\}$ por

$$\sin(\varphi(k)) = m(k)/\sqrt{k^2 + m(k)^2} \quad \cos(\varphi(k)) = k/\sqrt{k^2 + m(k)^2},$$

$$\text{com, } \sin^2 + \cos^2 = 1 = \frac{m(k)^2}{k^2 + m(k)^2} + \frac{k^2}{k^2 + m(k)^2}, \quad E(k)^2 = m(k)^2 + k^2,$$

Equação do Hiato de Massa I: Spinores

- Com $N(k)^2 = 2(1 + \sin(\phi(k)))$, os spinores $u_s(k), v_s(k)$ são dados, para a representação *Oliver – Péne* por:

$$u_s(k) = \frac{1}{N(k)} \left[1 + \sin(\varphi(k))\beta + \cos(\varphi(k)) \vec{\alpha} \cdot \hat{k} \right] u_{0s}, \quad \varphi(k) = 2\phi(k)$$

$$v_s(k) = \frac{1}{N(k)} \left[1 - \sin(\varphi(k))\beta - \cos(\varphi(k)) \vec{\alpha} \cdot \hat{k} \right] v_{0s}$$

- trocando $\{\sin(\varphi(k)), \cos(\varphi(k))\}$ por

$$\sin(\varphi(k)) = m(k)/\sqrt{k^2 + m(k)^2} \quad \cos(\varphi(k)) = k/\sqrt{k^2 + m(k)^2},$$

$$\text{com, } \sin^2 + \cos^2 = 1 = \frac{m(k)^2}{k^2 + m(k)^2} + \frac{k^2}{k^2 + m(k)^2}, \quad E(k)^2 = m(k)^2 + k^2,$$

- obtêm-se, com $E \equiv E(k)$, $m \equiv m(k)$, as expressões usuais para os spinores

$$u_s(k) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{bmatrix} \Phi_{0,s} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{k}}{E+m} \Phi_{0,s} \end{bmatrix}, \quad v_s(k) = \sqrt{\frac{E+m}{2E}} \begin{bmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \hat{k}}{E+m} \chi_{0,s} \\ \chi_{0,s} \end{bmatrix}$$

- $u_s^{IZ}(k) = \sqrt{\frac{E}{m}} u_s^P(k), \quad v_s^{IZ}(-k) = \sqrt{\frac{E}{m}} v_s^P(k)$

Pondo fermiões - Simetria quiral

- Como obter a função $\varphi(k)$? Eis um exemplo:

Pondo fermiões -Simetria quiral

• Como obter a função $\varphi(k)$? Eis um exemplo:

Consideremos o Hamiltoniano de um quark livre,

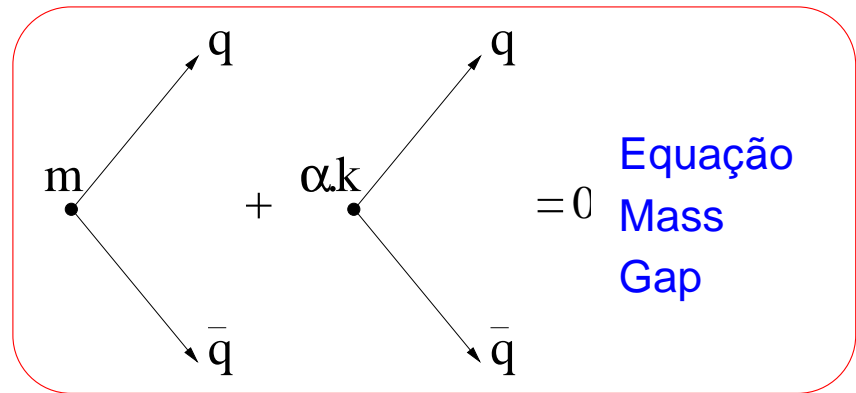
$$H = \int \widehat{\Psi}^{P\dagger}(x) \left(m\beta - i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \right) \widehat{\Psi}^P(x)$$

Pondo fermiões - Simetria quiral

• Como obter a função $\varphi(k)$? Eis um exemplo:

Consideremos o Hamiltoniano de um quark livre,

$$H = \int \widehat{\Psi}^{P\dagger}(x) \left(m\beta - i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \right) \widehat{\Psi}^P(x)$$

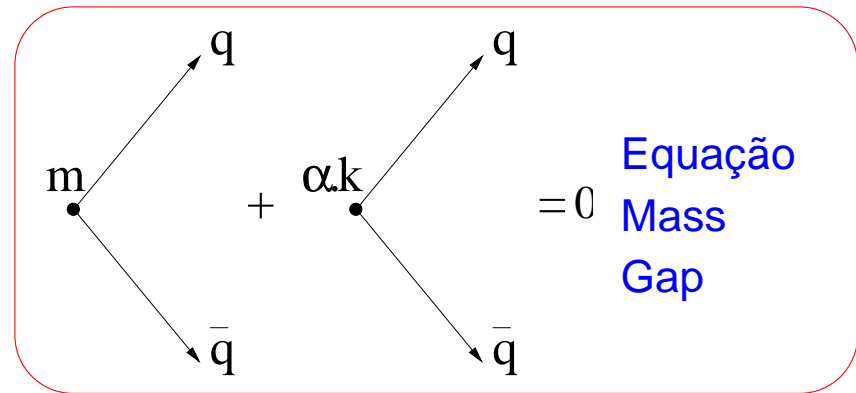


Pondo fermiões -Simetria quiral

- Como obter a função $\varphi(k)$? Eis um exemplo:

Consideremos o Hamiltoniano de um quark livre,

$$H = \int \widehat{\Psi}^{P\dagger}(x) \left(m\beta - i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \right) \widehat{\Psi}^P(x)$$



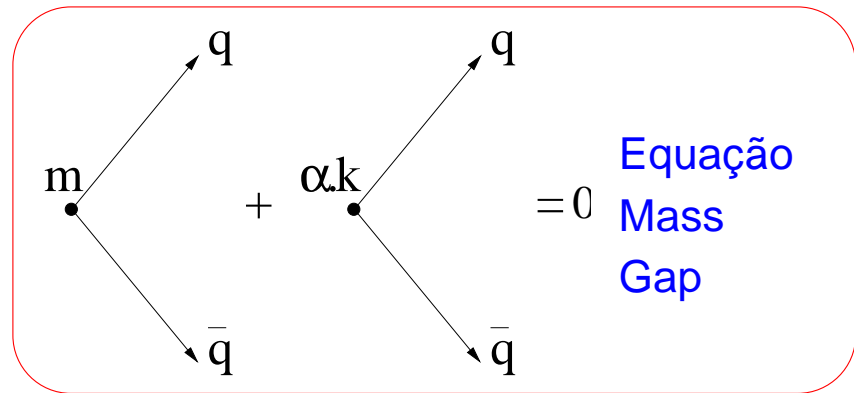
- Definamos: $A_k = m$, $B_k = k$. Então $\cos(\varphi(k))A_k - \sin(\varphi(k))B_k = 0$ é a equação de mass gap que se obtém de por a zero o diagrama acima

Pondo fermiões - Simetria quiral

- Como obter a função $\varphi(k)$? Eis um exemplo:

Consideremos o Hamiltoniano de um quark livre,

$$H = \int \widehat{\Psi}^{P\dagger}(x) \left(m\beta - i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \right) \widehat{\Psi}^P(x)$$



- Definamos: $A_k = m$, $B_k = k$. Então $\cos(\varphi(k))A_k - \sin(\varphi(k))B_k = 0$ é a equação de mass gap que se obtém de por a zero o diagrama acima

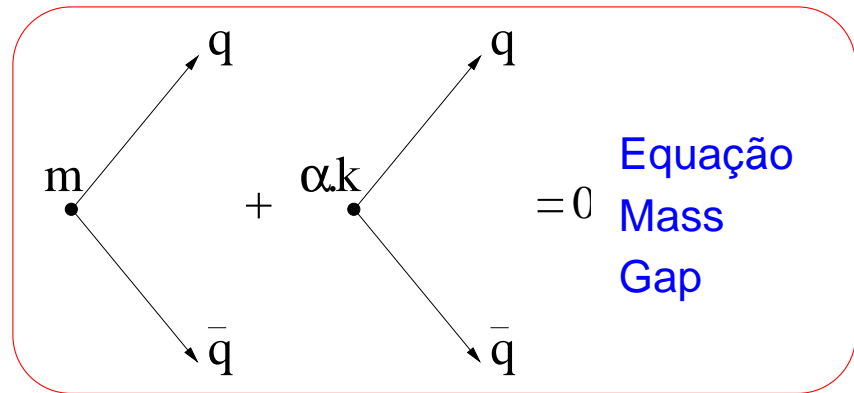
- $E_k = \pm \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$ e $H = \sqrt{k^2 + m^2}\beta$

Pondo fermiões - Simetria quiral

- Como obter a função $\varphi(k)$? Eis um exemplo:

Consideremos o Hamiltoniano de um quark livre,

$$H = \int \widehat{\Psi}^{P\dagger}(x) \left(m\beta - i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \right) \widehat{\Psi}^P(x)$$



- Definamos: $A_k = m$, $B_k = k$. Então $\cos(\varphi(k))A_k - \sin(\varphi(k))B_k = 0$ é a equação de mass gap que se obtém de por a zero o diagrama acima

- $E_k = \pm \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$ e $H = \sqrt{k^2 + m^2}\beta$

- Este procedimento generaliza-se para casos com interação $K_{\mu\nu}^{ab}(x - y)$:

$$H = \int d^3x q^\dagger(x) \left(m\beta - i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} \right) q(x) + \int \frac{d^3x d^3y}{2} J_\mu^a(x) K_{\mu\nu}^{ab}(x - y) J_\nu^b(y).$$

$$J_\mu^a(x) = \bar{q}(x) \gamma_\mu \frac{\lambda^a}{2} q(x)$$

O pião : Um exemplo da Eq. Mass Gap

- Consideremos o operador de carga quiral $Q_5^0 = \int d^3x \hat{\Psi}^\dagger(x) \gamma^0 \gamma^5 \hat{\Psi}(x)$

O pião : Um exemplo da Eq. Mass Gap

- Consideremos o operador de carga quiral $Q_5^0 = \int d^3x \hat{\Psi}^\dagger(x) \gamma^0 \gamma^5 \hat{\Psi}(x)$
- Usando as definições de u e v , obtemos

$$Q_5^0 = \int d^3p p \cos\varphi \left(\vec{\sigma}_{ss'} \hat{b}_s^\dagger(p) \hat{b}_{s'}(p) + \vec{\sigma}_{ss'}^* \hat{d}_s(p) \hat{d}_{s'}^\dagger(p) \right) +$$
$$+ \sin\varphi \mu_{ss'} \left(\hat{b}_s^\dagger(p) \hat{d}_{s'}^\dagger(-p) + \hat{d}_{s'}(-p) \hat{b}_s(p) \right)$$

O pião : Um exemplo da Eq. Mass Gap

- Consideremos o operador de carga quiral $Q_5^0 = \int d^3x \hat{\Psi}^\dagger(x) \gamma^0 \gamma^5 \hat{\Psi}(x)$
- Usando as definições de u e v , obtemos

$$Q_5^0 = \int d^3p \, p \cos\varphi \left(\vec{\sigma}_{ss'} \hat{b}_s^\dagger(p) \hat{b}_{s'}(p) + \vec{\sigma}_{ss'}^* \hat{d}_s(p) \hat{d}_{s'}^\dagger(p) \right) +$$

$$+ \sin\varphi \mu_{ss'} \left(\hat{b}_s^\dagger(p) \hat{d}_{s'}^\dagger(-p) + \hat{d}_{s'}(-p) \hat{b}_s(p) \right)$$

O termo anômalo de Bogoliubov cria um pião

$$: Q_5^0 | \Omega \rangle = | \pi \rangle$$

Simetria Quiral:

$$[Q_5^0, \hat{H}] = 0$$

Logo, $\hat{H} | \pi \rangle = 0 !$

O pião : Um exemplo da Eq. Mass Gap

- Consideremos o operador de carga quiral $Q_5^0 = \int d^3x \hat{\Psi}^\dagger(x) \gamma^0 \gamma^5 \hat{\Psi}(x)$
- Usando as definições de u e v , obtemos

$$Q_5^0 = \int d^3p \, p \cos\varphi \left(\vec{\sigma}_{ss'} \hat{b}_s^\dagger(p) \hat{b}_{s'}(p) + \vec{\sigma}_{ss'}^* \hat{d}_s(p) \hat{d}_{s'}^\dagger(p) \right) + \sin\varphi \mu_{ss'} \left(\hat{b}_s^\dagger(p) \hat{d}_{s'}^\dagger(-p) + \hat{d}_{s'}(-p) \hat{b}_s(p) \right)$$

- O pião $|\pi\rangle$ é o **bosão de Goldstone** associado a Q_5^0 , isto é, à simetria quiral $[Q_5^0, \hat{H}] = 0$

O termo anômalo de Bogoliubov cria um pião

$$: Q_5^0 | \Omega \rangle = | \pi \rangle$$

Simetria Quiral:

$$[Q_5^0, \hat{H}] = 0$$

Logo, $\hat{H} | \pi \rangle = 0 !$

O pião : Um exemplo da Eq. Mass Gap

- Consideremos o operador de carga quiral $Q_5^0 = \int d^3x \hat{\Psi}^\dagger(x) \gamma^0 \gamma^5 \hat{\Psi}(x)$
- Usando as definições de u e v , obtemos

$$Q_5^0 = \int d^3p p \cos\varphi \left(\vec{\sigma}_{ss'} \hat{b}_s^\dagger(p) \hat{b}_{s'}(p) + \vec{\sigma}_{ss'}^* \hat{d}_s(p) \hat{d}_{s'}^\dagger(p) \right) + \sin\varphi \mu_{ss'} \left(\hat{b}_s^\dagger(p) \hat{d}_{s'}^\dagger(-p) + \hat{d}_{s'}(-p) \hat{b}_s(p) \right)$$

O termo anômalo de Bogoliubov cria um pião

$$: Q_5^0 | \Omega \rangle = | \pi \rangle$$

Simetria Quiral:

$$[Q_5^0, \hat{H}] = 0$$

Logo, $\hat{H} | \pi \rangle = 0 !$

- O pião $|\pi\rangle$ é o **bosão de Goldstone** associado a Q_5^0 , isto é, à simetria quiral $[Q_5^0, \hat{H}] = 0$
- Esta quebra espontânea da simetria quiral, $S_\chi SB$, consequência de interações fortes, mas independente da forma particular destas, tem inúmeras consequências na física dos hádrons tais como **PCAC**; espalhamento $\pi\pi$ e, como vimos na primeira lição, na força **N-N**. **Mais! Uniformiza**, debaixo **da mesma física o espalhamento “scattering” q-q e a aniquilação $q - \bar{q}$** e portanto permite o **tratamento controlado** de canais acoplados (**unitarização**). Permite ainda compreender o antigo puzzle das diferenças de massa $\Delta - N$ comparada com o caso $\rho - \pi$.